

数学 (理科系)

1

微分法の応用問題として、さまざまな内容を出題しました。(1)は、いわゆる「方程式への応用」というジャンルの有名問題です。 $y = \log x$ と $y = tx$ の共有点を考えるときには、 $\log x = tx$ から $t = \frac{\log x}{x}$ として

直線 $y = t$ のグラフと $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフの共有点を調べるのが定石ですが、「それらしいコト」をやっていて答えも出ているのに、あまりにも説明不足で部分点がつけられない答案が非常に目立ちました。得点が低かった人は各自の答案を見直して、どこに記述の不備があったのか、よく確認しましょう。(3)は試験の実施時期を勘案して「平均値の定理を用いて」という誘導をつけましたが、実際の入試ではもちろんこのような誘導はつきません。自力で解けるようにしておきたいところです。(4)は合成関数の微分法や逆関数の微分法に習熟していないと正解できないので、やや難易度の高い問題でした。

2

条件付き確率・期待値の問題ですが、本問は文理共通の出題で、理系の受験者のみなさんにとって難易度は低めだったはずなので、名大入試突破を目指す上では完答が求められるレベルです。完答に至らなかった人はしっかり鍛えておくべきです。

3

整数 (不定方程式) の問題ですが、本問は文理共通の出題で、理系の受験者のみなさんにとっては完答が求められるレベルです。理系の受験者の中では白紙答案はほとんどありませんでしたが、(2)で「答えだけ書いてあるもの」や「 $a = 1, b = 4, c = 36$ 」の代わりに「 $a = 1, b = 2, c = 6$ 」と書いてあるものなどが目立ちました。一般に、整数の問題で「題意を満たす整数の組をすべて求めよ」というのは「解答で示した組がすべての組であって、他にはないことを証明せよ」ということを含意しています。共通テストのようにマークで答えが合っていればオシマイというわけではありません。特にこの問題のレベルであれば、解答の途中の論証の甘さは大きな減点になってしまいます。(2)で答えの組は合っているのに得点が低かった人は、減点されないような答案を書くことに意識を向けてください。

4

極形式で表された複素数の性質を用いて、三角関数の式の値を求める問題です。(1)は①(1)と同様に、答えは合っているのに部分点がつけられない答案が目立ちました。特に、一般角を考慮するという意識が薄いために大幅な減点をされる、あるいは0点、という答案が多く見られました。該当する人は、正確に答案を記述するようにしなければいけません。(2)(3)は(4)の求値問題に対する誘導ですが、うまく誘導に乗って(4)までたどり着くことができた人はごく少数でした。複素数平面の単元は、特に現役生にとってはまだ内容の理解や問題演習が不十分で、学習がやや遅れている人が多いようです。名大入試に向けて、しっかり時間をかけて準備してください。

理系数学の答案では、①、②の平均点が高く③、④の平均点が低いという傾向が見られました。前半の大問に時間がかかり過ぎて後半の大問を解く時間が十分にとれなかった受験者もかなりいたようです。名大の理系数学は計算のボリュームはかなりありますが、150分で4問なので十分に時間はあるはずです。今回の模試では計算の分量はそれほど多くないので、時間が足りなくなるのは計算力(や学力)が不十分と言わざるを得ません。時間が足りなくなった人は、計算力を鍛えていくことは当然のこととしても、途中でうまく解けなくなった問題を一度保留して他の問題を解いてみるなど、まず問題全体を見渡す習慣をつけなければなりません。

【採点基準】

① (配点 50 点)

(1) 10 点

$\log x = tx (x > 0)$ で 1 点

「 C と l が異なる ~ 異なる 2 つの実数 x が存在すること」に言及して 2 点

$g(x)$ の増減表を正しくかけて 2 点

$y = g(x)$ のグラフが正しくかけて 3 点

結果に 2 点

(2) 10 点

$y = \frac{1}{a}x + \log a - 1$ に 3 点

$y = \frac{1}{b}x + \log b - 1$ に 3 点

結果に 4 点

(3) 10 点

$q(x) = x \log x$ とおき、 $x > 0$ の範囲で $q(x)$ が連続かつ微分可能であることを述べて 2 点

$\frac{b \log b - a \log a}{b - a} = \log c + 1$, $a < c < b$ をみたす c が存在することを述べて 3 点

$\log a < \log c < \log b$ を導いて 2 点

結論の不等式を導いて 3 点

(4) 20 点

$f(t) = \frac{1}{a}$ に 2 点

$\frac{\log a}{a} = t$ に 2 点

$\frac{da}{dt} = \frac{a^2}{1 - \log a}$ に 4 点

$f'(t) = \frac{1}{\log a - 1}$ に 4 点

$t = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ のとき $a = \sqrt{e}$ であることを示して 5 点

答えに 3 点

② (配点 50 点)

(1) 15 点

$E_A = \frac{9}{5}$ に 7 点

$E_B = \frac{3}{5}$ に 8 点

(2) 15 点

Y さんが赤球を 1 回だけ取り出す確率に 6 点

Y さんが硬貨の表を出し、かつ赤球を 1 回だけ取り出す確率に 6 点

条件付き確率に 3 点

(3) 20 点

箱 A の赤球が白球より先になくなるまでの過程を示して 8 点

正しく立式し、答えを出して 12 点

③ (配点 50 点)

(1) 20 点

abc の素因数分解を考える方針に 4 点

abc の正の約数の個数は $(n_1 + 1) \times \cdots \times (n_m + 1)$ に 4 点

abc の正の約数の個数が奇数となる条件は $n_1, \dots, n_m$ がすべて偶数であることに 6 点

証明を完結させて 6 点

(2) 15 点

k^2 の条件について、根拠を明示した上で $a = k^2 = 1, 4, 9$ に 3 点

$k^2 = 1$ のとき、 $l^2 = 4$ 、 $m^2 = 36$ であり、 $l^2 = 9, 16$ のとき条件をみたす m^2 が存在しないことを確かめて 3 点

$k^2 = 4$ のとき、 l^2 、 m^2 が存在しないことを確かめて 3 点

$k^2 = 9$ のとき、 l^2 、 m^2 が存在しないことを確かめて 3 点

結果に 3 点

(3) 15 点

x の条件について、根拠を明示した上で $x = 1, 2, 3$ に 3 点

$x = 1$ のとき $(a, b, c) = (2, 13, 26), (5, 6, 30)$ に 3 点

$x = 2$ のとき $(a, b, c) = (6, 14, 21)$ に 3 点

$x = 3$ のとき条件をみたす y, z が存在しないことを確かめて 3 点

結果に 3 点

④ (配点 50 点)

(1) 10 点

$\sin \alpha + i \cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2m\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2m\pi \right)$ (m は整数) に 3 点

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2m\pi$ に 2 点

「 β の範囲に一致するのは $m=0$ のときのみ」に 2 点

結果に 3 点

(2) 15 点

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\theta\right) \text{に 3 点}$$

$$\sin n\theta + i\cos n\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) \text{に 3 点}$$

$$\frac{n\pi}{2} - n\theta = \frac{\pi}{2} - n\theta + 2k\pi \text{に 4 点}$$

結果に 5 点

(3) 10 点

$$n = 5 \text{に 1 点}$$

二項定理で展開して 5 点

証明を完成させて 4 点

(4) 15 点

$$\theta = \frac{\pi}{5} \text{に 2 点}$$

$$\frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{5}} \text{が 2 次方程式 } 5x^2 - 10x + 1 = 0 \text{ の解であるに 3 点}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{5} \text{に 2 点}$$

$$\frac{1}{\tan^2 \frac{2\pi}{5}} \text{が 2 次方程式 } 5x^2 - 10x + 1 = 0 \text{ の解であるに 3 点}$$

証明を完成させて 5 点