

数学 (理科系)

1 (配点 50 点)

(1) 10 点

最初の状態から 2 回目の操作終了時点の状態への推移とその確率を論じて 4 点

X_1 の期待値に 3 点

X_2 の期待値に 3 点

(2) 15 点

n 回目の操作終了時点の状態から $n + 1$ 回目の操作終了時点の状態への推移に言及して 3 点

p_n, q_n, r_n に関する連立漸化式を導いて 3 点

$p_n = r_n$ を示して 2 点

$q_n = 1 - 2p_n$ に 2 点

答えに 5 点

(3) 10 点

$$p_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \left(p_n - \frac{1}{6} \right) \text{ に 2 点}$$

$$p_n - \frac{1}{6} = \left(p_1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ に 3 点}$$

答えに 5 点

(4) 15 点

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{6} = \frac{n}{6} \text{ に 3 点}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \text{ に 4 点}$$

答えに 8 点

2 (配点 50 点)

(1) 8 点

$$\vec{b} = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) \text{ に 2 点}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4}, \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ に 3 点}$$

答えに 3 点

(2) 12 点

$$x = \frac{1}{2} \text{ に 2 点}$$

$$y = \frac{4t-1}{2\sqrt{15}} \text{ に 2 点}$$

$$z^2 = -\frac{2}{15} (t-4)(2t+7) \text{ に 2 点}$$

$z \neq 0$ に 3 点

答えに 3 点

(3) 15点

$$\vec{h} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}, \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ に 3 点}$$

$$-3\alpha + 3\beta + (t-1)\gamma = 0 \text{ に 2 点}$$

$$-3\alpha + (t-1)\beta + 3\gamma = 0 \text{ に 2 点}$$

$$\alpha = \frac{t+2}{t+8}, \beta = \frac{3}{t+8}, \gamma = \frac{3}{t+8} \text{ に 3 点}$$

答えに 5 点

(4) 15点

$$\frac{t+2}{t+8} \geq 0 \text{ かつ } \frac{3}{t+8} \geq 0 \text{ に 5 点}$$

$$t \geq -2 \text{ に 4 点}$$

答えに 6 点

3 (配点 50 点)

(1) 10点

$$h'(x) = e^x - 1 - x, h''(x) = e^x - 1 \text{ に 各 1 点}$$

$$x > 0 \text{ のとき } h'(x) > 0 \text{ を示して 3 点}$$

$$x > 0 \text{ のとき } e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \text{ を示して 5 点}$$

(2) 20点

(i) 10点

$$0 < x e^{-x} < \frac{2}{x} \text{ に 5 点}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ を示して 5 点}$$

(ii) 10点

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, f''(x) = (x-2)e^{-x} \text{ に 各 1 点}$$

$$f(x) \text{ の増減, 極値, 凹凸を調べて 3 点}$$

$$f(x) \text{ の } x \rightarrow \pm\infty \text{ での挙動を調べて 2 点}$$

$$\text{グラフの概形を図示して 3 点}$$

(3) 20点

$$\text{方程式 } F(x) = a \text{ が異なる 2 つの実数解をもつことが必要であることを論じて 3 点}$$

$$F(x) \text{ の増減, 極値, } x \rightarrow \pm\infty \text{ での挙動を調べて 6 点}$$

$$\text{方程式 } F(x) = a \text{ が異なる 2 つの実数解をもつための条件 } -\frac{1}{e^2} < a < 0 \text{ に 3 点}$$

$$g(x) \text{ が } x = \alpha \text{ で極大値をとり, } x = \beta \text{ で極小値をとることを示して 5 点}$$

答えに 3 点

4 (配点 50 点)

(1) 10 点

$$z_2 = \alpha + 1 \text{ に 5 点}$$

$$z_3 = \alpha^2 + \alpha + 1 \text{ に 5 点}$$

(2) 15 点

$$z_{n+1} - \frac{1}{1-\alpha} = \alpha \left(z_n - \frac{1}{1-\alpha} \right) \text{ に 3 点}$$

$$z_n - \frac{1}{1-\alpha} = \left(z_1 - \frac{1}{1-\alpha} \right) \alpha^{n-1} \text{ に 5 点}$$

$$z_n = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \text{ を示して 7 点}$$

(3) 10 点

$$\alpha^6 = 1 \text{ に 2 点}$$

$$\cos 6\theta + i \sin 6\theta = 1 \text{ に 2 点}$$

答えに 6 点

(4) 15 点

点の列 $P_1, P_2, \dots, P_6$ が点 $\frac{1}{1-\alpha}$ を中心として 1 つ前の点を角 θ だけ回転して得られることを示して 3 点

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ のとき不適であることを示して 2 点

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき 6 点 $P_1, P_2, \dots, P_6$ がこの順で正六角形の各頂点となることを示して 5 点

正六角形の一辺の長さを求めて 2 点

正六角形の面積を求めて 3 点